

**ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2021. május 4.**

# **MATEMATIKA**

## **EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA**

### **JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ**

**EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTERIUMA**

---

---

## Fontos tudnivalók

### Formai előírások:

1. Kérjük, hogy a dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal, olvashatóan** javítsa ki.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerüljön.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén kérjük, hogy a maximális pontszám feltüntetése mellett kipipálással jelezze, hogy az adott gondolati egységet látta, és jónak minősítette.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy **a hiba jelzése** mellett az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra. Ha a dolgozat javítását jobban követhetővé teszi, akkor a vizsgázó által elvesztett részpontszámok jelzése is elfogadható. Ne maradjon olyan részlet a megoldásban, amelyről a javítás után nem nyilvánvaló, hogy helyes, hibás vagy fölösleges.
5. A javítás során **alkalmazza az alábbi jelöléseket.**
  - helyes lépés: *kipipálás*
  - elvi hiba: *kétszeres aláhúzás*
  - számolási hiba vagy más, nem elvi hiba: *egyszeres aláhúzás*
  - rossz kiinduló adattal végzett helyes lépés: *szaggatott vagy áthúzott kipipálás*
  - hiányos indoklás, hiányos felsorolás vagy más hiány: *hiányjel*
  - nem érthető rész: *kérdőjel és/vagy hullámvonal*
6. Az ábrán kívül **ceruzával** írt részeket ne értékelje.

### Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók, hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik.** Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel – mint kiinduló adattal – helyesen számol tovább a következő gondolati egységekben vagy részkérdésekben, akkor ezekre a részekre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység**, akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.

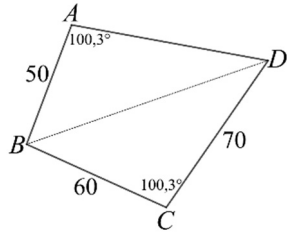
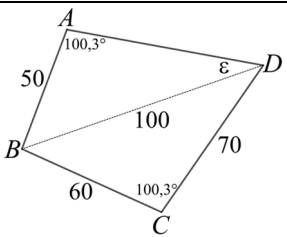
- 
6. Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**. A javítás során egyértelműen jelezze, hogy melyik változatot értékelte, és melyiket nem.
  7. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont) **nem adható**.
  8. Egy feladatra vagy részfeladatra adott összpontszám **nem lehet negatív**.
  9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
  10. A gondolatmenet kifejtése során **a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el**: összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás,  $n!$ ,  $\binom{n}{k}$  kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése ( $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\operatorname{tg}$ ,  $\log$  és ezek inverzei), a  $\pi$  és az  $e$  szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek az átlag és a szórás kiszámítására abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, így azokért nem jár pont**.
  11. Az **ábrák** bizonyító erejű felhasználása (például adatok leolvasása méréssel) nem elfogadható.
  12. **Valószínűségek** megadásánál (ha a feladat szövege másképp nem rendelkezik) a százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.
  13. Ha egy feladat szövege nem ír elő kerekítési kötelezettséget, akkor az útmutatóban megadottól eltérő, **ésszerű és helyes kerekítésekkel** kapott rész- és végeredmény is elfogadható.
  14. **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető**. A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha a vizsgázó nem jelölte meg, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, és a választás ténye a dolgozatból sem derül ki egyértelműen, akkor a nem értékelendő feladat automatikusan a kitűzött sorrend szerinti utolsó feladat lesz.

## I.

<b>1. a)</b>		
A négyzetgyök értelmezési tartománya és értékészlete miatt $-1 \leq x \leq 3$ .	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó behelyettesítéssel ellenőríz.</i>
Négyzetre emelve: $-2x + 6 = x^2 + 2x + 1$ .	1 pont	
$x^2 + 4x - 5 = 0$	1 pont	
Az egyenlet gyökei $-5$ és $1$ .	1 pont	
Ellenőrzés: behelyettesítéssel vagy (a $[-1; 3]$ halmazon) ekvivalens átalakításokra hivatkozással kapjuk, hogy az $1$ megoldása, a $-5$ pedig nem megoldása az eredeti egyenletnek.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>5 pont</b>	

<b>1. b) első megoldás</b>		
Az egyenlet értelmezési tartománya: $x > 0$ .	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó behelyettesítéssel ellenőríz.</i>
A logaritmus azonosságait alkalmazva: $4 \log_4 x + 9 \log_4 x = 4 \log_4 x + 9 \log_4 8$ .	2 pont	
$9 \log_4 x = 9 \log_4 8$ , azaz $\log_4 x = \log_4 8$ , amiből a logaritmusfüggvény kölcsönös egyértelműsége miatt $x = 8$ .	2 pont	
Ellenőrzés: behelyettesítéssel vagy (az $x > 0$ halmazon) ekvivalenciára hivatkozással.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>6 pont</b>	

<b>1. b) második megoldás</b>		
Az egyenlet értelmezési tartománya: $x > 0$ .	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó behelyettesítéssel ellenőríz.</i>
A logaritmus és a hatványozás azonosságait alkalmazva: $\log_4 x^4 + \log_4 x^9 = \log_4 x^4 + \log_4 8^9$ .	2 pont	
$\log_4 x^9 = \log_4 8^9$ A logaritmusfüggvény kölcsönös egyértelműsége miatt $x^9 = 8^9$ , amiből (az $x \mapsto x^9$ függvény kölcsönös egyértelműsége miatt) $x = 8$ .	2 pont	
Ellenőrzés: behelyettesítéssel vagy (az $x > 0$ halmazon) ekvivalenciára hivatkozással.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>6 pont</b>	

<b>2. a)</b>		
 <p>Az adatokat helyesen feltüntető ábra.</p>	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó ábra nélkül helyesen számol.</i>
<p>A <math>BCD</math> háromszög területe</p> $\frac{BC \cdot CD \cdot \sin 100,3^\circ}{2} = \frac{60 \cdot 70 \cdot \sin 100,3^\circ}{2} \approx 2066 \text{ (m}^2\text{)}.$	1 pont	
<p>A <math>BCD</math> háromszögben koszinusztétellel:</p> $BD^2 = 60^2 + 70^2 - 2 \cdot 60 \cdot 70 \cdot \cos 100,3^\circ.$	1 pont	
<p>Ebből <math>BD \approx 100</math> (m).</p>	1 pont	
 <p>Az <math>ABD</math> háromszögben szinusztétellel (az ábra szerint):</p> $\frac{\sin \varepsilon}{\sin 100,3^\circ} = \frac{50}{100}.$	1 pont*	
<p><math>\sin \varepsilon \approx 0,4919</math>, (mivel <math>\varepsilon</math> hegyesszög, ezért) <math>\varepsilon \approx 29,5^\circ</math>.</p>	1 pont*	
<p><math>\sphericalangle ABD = (180^\circ - 100,3^\circ - 29,5^\circ) = 50,2^\circ</math>,</p>	1 pont*	
<p>ezért az <math>ABD</math> háromszög területe</p> $\frac{AB \cdot BD \cdot \sin 50,2^\circ}{2} = \frac{50 \cdot 100 \cdot \sin 50,2^\circ}{2} \approx 1921 \text{ (m}^2\text{)}.$	1 pont*	
<p>A négyszög területe <math>2066 + 1921 = 3987 \text{ m}^2</math>.</p>	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>9 pont</b>	

*Megjegyzés: A \*-gal jelölt 4 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó.*

<p>Legyen <math>AD = x</math> (méter). Az <math>ABD</math> háromszögben koszinusztétellel:</p> $50^2 + x^2 - 2 \cdot 50 \cdot x \cdot \cos 100,3^\circ = 100^2.$	1 pont	
<p>Rendezve: <math>x^2 + 17,88x - 7500 = 0</math>.</p>	1 pont	
<p>Az egyenlet pozitív gyöke (egy tizedesjegyre kerekítve) 78,1 (a negatív gyök <math>-96,0</math>).</p>	1 pont	
<p>Ezért az <math>ABD</math> háromszög területe</p> $\frac{AB \cdot AD \cdot \sin 100,3^\circ}{2} = \frac{50 \cdot 78,1 \cdot \sin 100,3^\circ}{2} \approx 1921 \text{ (m}^2\text{)}.$	1 pont	

<b>2. b) első megoldás</b>		
A felhasznált 3 színt $\binom{4}{3} = 4$ -féleképpen választhatjuk ki.	1 pont	
Mivel négy háromszög van, és csak 3 szín, ezért két háromszögnek azonos színűnek kell lennie. Ezek csak szemköztiak lehetnek.	1 pont	
A két azonos színű szemközti háromszöget 2-féleképpen választhatjuk ki.	1 pont	
Az azonos színű háromszögek színét 3-féleképpen választhatjuk meg,	1 pont	
a maradék két háromszöget pedig 2-féleképpen színezzük (a maradék két színnel).	1 pont	
A lehetséges színezések száma ezért $4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 48$ .	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>6 pont</b>	

<b>2. b) második megoldás</b>		
Mivel négy háromszög van, és csak 3 szín, ezért az egyik színt kétszer is fel kell használnunk.	1 pont	
Ezt a színt 4-féleképpen választhatjuk ki.	1 pont	
Ezzel a színnel két szemközti háromszöget kell kiszíneznünk, ezeket 2-féleképpen választhatjuk ki.	1 pont	
A maradék két háromszög a maradék 3 szín közül kettővel $3 \cdot 2 = 6$ -féleképpen színezzük ki.	2 pont	
A lehetséges színezések száma ezért $4 \cdot 2 \cdot 6 = 48$ .	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>6 pont</b>	

<b>2. b) harmadik megoldás</b>		
Az $AB$ oldalra illeszkedő háromszög színe 4, a $BC$ oldalra illeszkedő háromszög színe ezek után 3-féle lehet.	1 pont	
Ez a két háromszög tehát $4 \cdot 3 = 12$ -féleképpen színezzük ki.	1 pont	
Tegyük fel, hogy az $AB$ oldalra illeszkedő háromszöget pirosra, a $BC$ -re illeszkedőt pedig kékre színeztük. Vagy a piros vagy a kék színt még egyszer használunk kell.	1 pont*	
Vagy a $CD$ oldalra illeszkedő háromszög piros, vagy a $DA$ oldalra illeszkedő háromszög kék. A negyedik háromszög mindkét esetben sárga vagy zöld lehet. Az első két háromszög bármely színezéséhez tehát 4-féleképpen színezzük ki az utolsó két háromszöget,	2 pont*	
így a lehetséges színezések száma $12 \cdot 4 = 48$ .	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>6 pont</b>	

*Megjegyzés: A \*-gal jelölt pontokat az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó.*

Tegyük fel, hogy az $AB$ oldalra illeszkedő háromszöget pirosra, a $BC$ -re illeszkedőt pedig kékre színeztük. Ha a $CD$ oldalra illeszkedő háromszög is piros, akkor 2-féleképpen fejezhető be a színezés (sárga vagy zöld színnel).	1 pont	
Ha a $CD$ oldalra illeszkedő háromszög nem piros, akkor 2-féle lehet (sárga vagy zöld). Mindkét esetben a $DA$ -ra illeszkedő háromszög csak kék lehet.	2 pont	

### 3. a) első megoldás

Tegyük fel, hogy $x$ db 6600 Ft-os, és $y$ db 4800 Ft-os részvényünk van. $\left. \begin{aligned} 6600x + 4800y &= 131\,400 \\ 6600\left(x + \frac{y}{3}\right) + 4800 \cdot \frac{2}{3}y &= 140\,400 \end{aligned} \right\}$	2 pont	
A második egyenletből az elsőt kivonva: $2200y - 1600y = 9000$ ,	1 pont	
ahonnan $y = 15$ ,	1 pont	
majd visszahelyettesítve $x = 9$ . (Tehát 9 db 6600 Ft-os, és 15 db 4800 Ft-os részvényünk van.)	1 pont	
Ellenőrzés: $6600 \cdot 9 + 4800 \cdot 15 = 131\,400$ . A 15 db 4800 Ft-os részvény harmadát, 5 db-ot cserélnénk 6600 Ft-osra. Így lenne 10 db 4800 Ft-os és 14 db 6600 Ft-os. Ezek összértéke $4800 \cdot 10 + 6600 \cdot 14 = 140\,400$ valóban.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>6 pont</b>	

### 3. a) második megoldás

A cserével a részvénytömeg értéke ( $140\,400 - 131\,400 =$ ) 9000 Ft-tal nőne.	1 pont	
A kétfajta részvény névértéke közötti különbség 1800 Ft, tehát ( $9000 : 1800 =$ ) 5 db 4800 Ft-os részvényt cserélnénk 6600 Ft-osra.	2 pont	
Ez az összes 4800 Ft-os részvény harmada, tehát ( $5 \cdot 3 =$ ) 15 db 4800 Ft-os részvényünk,	1 pont	
és ( $(131\,400 - 15 \cdot 4800) : 6600 =$ ) 9 db 6600 Ft-os részvényünk van.	2 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>6 pont</b>	

<b>3. b)</b>		
(Jelölje $n$ a keresett hónap sorszámát.) $450\,000 \cdot 1,013^n > 500\,000 \cdot 1,01^n$	2 pont	
$\left(\frac{1,013}{1,01}\right)^n > \frac{50}{45} = \frac{10}{9}$	1 pont	
A tízes alapú logaritmus függvény szigorúan monoton növekedő,	1 pont	<i>Az 1-nél nagyobb alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton növekedő, ezért</i>
ezért $n \lg \frac{1,013}{1,01} > \lg \frac{10}{9}$ , (közelítő értékekkel) $n \lg 1,003 > \lg 1,111$ .	1 pont	$n > \log_{\frac{1,013}{1,01}} \left(\frac{10}{9}\right)$ .
(Az egyenlőtlenséget pozitív számmal osztjuk): $n > \frac{\lg 1,111}{\lg 1,003} \approx 35,1$ .	1 pont	$\log_{\frac{1,013}{1,01}} \left(\frac{10}{9}\right) \approx 35,5$
Tehát a 36. hónap végén lesz először több pénz a második befektetésben.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>7 pont</b>	

*Megjegyzés: Ha a vizsgázó egyenlőtlenség helyett egyenlettel dolgozik, akkor  $n \approx 35,1$  megállapításáért legfeljebb 5 pontot kaphat. További 1-1 pont a helyes válaszáért, és az egyenlőtlenség irányának megfelelő indoklásáért jár.*



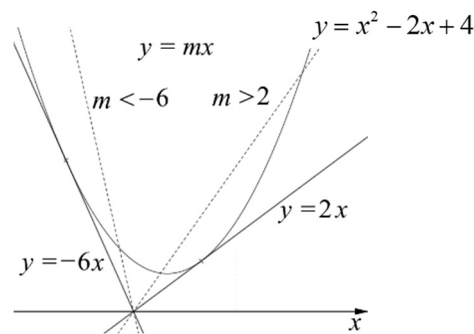
<b>4. a)</b>		
(Azt kell belátni, hogy a pontok koordinátái igazgá teszik a görbe egyenletét.) Az origó esetében: $0,25 \cdot 0 \cdot (0-5)^2 = 0$ igaz,	1 pont	
az $(5; 0)$ pont esetében: $0,25 \cdot 5 \cdot (5-5)^2 = 0$ igaz. (Tehát mindkét pont valóban rajta van a görbén.)	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>2 pont</b>	

<b>4. b)</b>		
A kértett valószínűség a trapéz és a korlátos síkidom területének hányadosa.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
(A görbe az $f : [0; 5] \rightarrow \mathbf{R}; f(x) = 0,25x(x-5)^2$ függvény grafikonja.) A síkidom területe: $\int_0^5 0,25x(x-5)^2 dx =$	1 pont	
$= \int_0^5 0,25(x^3 - 10x^2 + 25x) dx =$	1 pont	
$= 0,25 \left[ \frac{x^4}{4} - 10 \frac{x^3}{3} + 25 \frac{x^2}{2} \right]_0^5 =$	2 pont	
$= \frac{625}{48} \approx 13,02.$	1 pont	
$D$ pont első koordinátája 1, második koordinátáját (a trapéz egyik alapjának hosszát) behelyettesítéssel kapjuk: $0,25 \cdot 1 \cdot (1-5)^2 = 4$ . (Tehát $D(1; 4)$ .)	1 pont	
Hasonlóan $C$ pont első koordinátája 3, második koordinátája (a trapéz másik alapjának hossza): $0,25 \cdot 3 \cdot (3-5)^2 = 3$ . (Tehát $C(3; 3)$ .)	1 pont	
Mivel a trapéz magassága (az $AB$ szakasz hossza) 2, így a trapéz területe $\frac{4+3}{2} \cdot 2 = 7$ .	1 pont	
A kértett valószínűség $\frac{7}{13,02} \approx 0,538$ .	1 pont	<i>A valószínűség pontos értéke <math>\frac{7}{\frac{625}{48}} = 0,5376</math>.</i>
<b>Összesen:</b>	<b>10 pont</b>	

**II.**

<b>5. a)</b>		
Pontosan akkor van két valós gyök, ha az $x^2 - 2x - mx + 4 = 0$ egyenlet diszkriminánsa pozitív.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
(Az egyenlet $x^2 - (2+m)x + 4 = 0$ , ezért) $D = (2+m)^2 - 16$	1 pont	
$D = m^2 + 4m - 12 > 0$	1 pont	
Az $m^2 + 4m - 12 = 0$ egyenlet megoldásai $-6$ és $2$ .	1 pont	
Az $m \mapsto m^2 + 4m - 12$ másodfokú függvény képe „felfelé nyitott” parabola,	1 pont	<i>Ez a pont jár egy megfelelő ábráért is.</i>
tehát $m < -6$ vagy $m > 2$ esetén igaz a megadott kijelentés.	1 pont	$m \in ]-\infty; -6[ \cup ]2; +\infty[$
<b>Összesen:</b>	<b>6 pont</b>	

*Megjegyzés: Az ábra a megoldásban kapott  $m$  értékeknek megfelelő egyeneseket szemlélteti.*



<b>5. b)</b>		
Mivel $-1 \leq \cos x \leq 1$ ,	1 pont	
ezért $0 \leq (1 + \cos x)^2 \leq 4$ ,	1 pont	
$2 \leq (1 + \cos x)^2 + 2 \leq 6$ .	1 pont	
(A pozitív számok halmazán az $x \mapsto \frac{1}{x}$ függvény szigorúan monoton csökkenő, ezért) $\frac{1}{2} \geq \frac{1}{(1 + \cos x)^2 + 2} \geq \frac{1}{6}$ .	1 pont	
Ebből következik, hogy $\frac{3}{2} \geq \frac{3}{(1 + \cos x)^2 + 2} \geq \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ , tehát a megadott kijelentés valóban igaz (hiszen $f$ folytonos függvény).	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>5 pont</b>	

<b>5. c) első megoldás</b>		
Az $(A \wedge B) \vee C$ kijelentés pontosan akkor igaz, ha $A \wedge B$ , illetve $C$ közül legalább az egyik igaz.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
$A \wedge B$ igaz és $C$ igaz (vagyis mindhárom kijelentés igaz) valószínűsége: $0,6^3 = 0,216$ .	1 pont	
$A \wedge B$ igaz és $C$ hamis valószínűsége: $0,6^2 \cdot 0,4 = 0,144$ .	1 pont	
$A \wedge B$ hamis és $C$ igaz valószínűsége: $(1 - 0,6^2) \cdot 0,6 = 0,384$ .	1 pont	
Tehát a keresett valószínűség: $0,216 + 0,144 + 0,384 = 0,744$ .	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>5 pont</b>	

<b>5. c) második megoldás</b>		
Az $(A \wedge B) \vee C$ kijelentés pontosan akkor igaz, ha $A \wedge B$ , illetve $C$ közül legalább az egyik igaz.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
$A \wedge B$ igaz valószínűsége $0,6^2 = 0,36$ .	1 pont	
$C$ igaz valószínűsége $0,6$ .	1 pont	
Mindkétszer figyelembe vettük azt az eseményt, hogy $A \wedge B$ igaz és $C$ is igaz; ennek $0,36 \cdot 0,6 = 0,216$ a valószínűsége.	1 pont	
A szitaformula szerint a kért valószínűség $0,36 + 0,6 - 0,216 = 0,744$ .	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>5 pont</b>	

<b>5. c) harmadik megoldás</b>		
Az $(A \wedge B) \vee C$ kijelentés pontosan akkor igaz, ha $C$ igaz, vagy ha $C$ hamis és $A \wedge B$ igaz.	2 pont	<i>Ez a 2 pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
$C$ igaz valószínűsége $0,6$ .	1 pont	
$A \wedge B$ igaz és $C$ hamis valószínűsége: $0,6^2 \cdot 0,4 = 0,144$ .	1 pont	
Tehát a kért valószínűség: $0,6 + 0,144 = 0,744$ .	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>5 pont</b>	

<b>5. c) negyedik megoldás</b>		
(A komplementer esemény valószínűségét határozzuk meg.) Az $(A \wedge B) \vee C$ kijelentés pontosan akkor hamis, ha $A \wedge B$ hamis és $C$ is hamis.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
Az $A \wedge B$ hamis, ha legalább az egyik kijelentés hamis; ennek $2 \cdot 0,6 \cdot 0,4 + 0,4^2 = 0,64$ a valószínűsége.	2 pont	$1 - 0,6^2$

Annak a valószínűsége, hogy $A \wedge B$ hamis és $C$ is hamis $0,64 \cdot 0,4 = 0,256$ .	1 pont	
Annak a valószínűsége tehát, hogy $(A \wedge B) \vee C$ kijelentés igaz: $1 - 0,256 = 0,744$ .	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>5 pont</b>	

**5. c) ötödik megoldás**

(Az összes lehetséges eset felsorolása és az igaz esetek valószínűségének megadása.)

$A$	$B$	$C$	$A \wedge B$	$(A \wedge B) \vee C$	valószínűsége
$i$	$i$	$i$	$i$	$i$	$0,6^3$
$i$	$i$	$h$	$i$	$i$	$0,6^2 \cdot 0,4$
$i$	$h$	$i$	$h$	$i$	$0,6^2 \cdot 0,4$
$i$	$h$	$h$	$h$	$h$	
$h$	$i$	$i$	$h$	$i$	$0,6^2 \cdot 0,4$
$h$	$i$	$h$	$h$	$h$	
$h$	$h$	$i$	$h$	$i$	$0,6 \cdot 0,4^2$
$h$	$h$	$h$	$h$	$h$	

4 pont

*A 8 lehetséges eset és azok logikai értékének helyes megadása 2 pont, az öt „igaz” logikai értékű lehetőség valószínűségeinek helyes kiszámítása 2 pont.*

A kért valószínűség:  
 $0,6^3 + 3 \cdot 0,6^2 \cdot 0,4 + 0,6 \cdot 0,4^2 = 0,744$ .

1 pont

**Összesen: 5 pont**

*Megjegyzés: A feladat szövege (bár feltételezte) nem jelentette ki kifejezetten, hogy az  $A$ ,  $B$  és  $C$  események függetlenek. Ha a vizsgázó megoldásában nem feltételezte, hogy a három esemény (kijelentés) független, ezért (megfelelő indoklással) azt válaszolta, hogy a kért esemény valószínűsége  $0,6$  és  $1$  között lehet, akkor teljes pontszámot kapjon.*

**6. a)**

(Az ismeretségi gráfban a pontokat a nevek betűivel jelöljük, az ismeretségek a gráf élei.)  
 A  $\{D, E, F\}$  részgráfban 3 él lehet.

1 pont

*Az ismeretségi gráfban az élek száma négyféle lehet: 0, 1, 2, 3.*

A 3 él bármelyike vagy szerepel a gráfban (ha a két személy ismeri egymást), vagy nem,

1 pont

*Ezek rendre  $1, \binom{3}{1} = 3,$   
 $\binom{3}{2} = 3,$  illetve 1 lehetőséget jelentenek.*

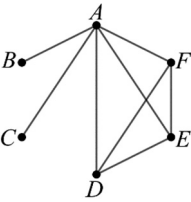
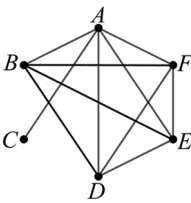
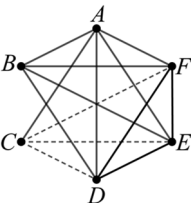
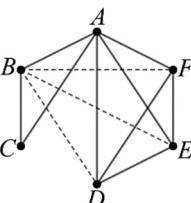
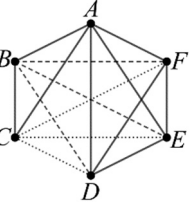
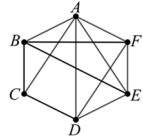
ezért  $2^3 = 8$ -féle ismeretségi gráf (háló) lehetséges.

1 pont

*Összesen  $1 + 3 + 3 + 1 = 8$  lehetőség van.*

**Összesen: 3 pont**

*Megjegyzés: Teljes pontszámot kapjon a vizsgázó, ha a nyolc lehetséges ismeretségi gráfot felrajzolja, és ez alapján helyesen válaszol.*

<b>6. b)</b>		
<p>Az ismeretségi gráfban <math>A</math> ötödfokú pont, ezért minden más ponttal össze van kötve, továbbá a <math>D, E, F</math> pontok mindegyike össze van kötve a másik kettővel.</p>	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
<p>Ha a fentieknek megfelelő éleket berajzoljuk, akkor a <math>B</math>-ből még további 3, <math>C</math>-ből még további 2 élt kell meghúznunk.</p>		1 pont
<p>Két esetet vizsgálunk aszerint, hogy a <math>BC</math> él benne van-e a gráfban, vagy sem.</p>	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
<p>I. eset: Ha a <math>BC</math> él nincs benne a gráfban, akkor a negyedfokú <math>B</math> pont össze van kötve a <math>D, E, F</math> pontok mindegyikével. Ez csak egyféleképpen lehetséges.</p>		1 pont
<p>A harmadfokú <math>C</math>-ből kiinduló maradék 2 élt ekkor 3-féleképpen húzhatjuk be (<math>C</math>-t összekötjük a <math>D, E, F</math> pontok közül valamelyik kettővel). Az I. esetben tehát 3 lehetőség van összesen.</p>		1 pont
<p>II. eset: Ha a <math>BC</math> él benne van a gráfban, akkor a <math>B</math>-ből kiinduló maradék 2 élt 3-féleképpen húzhatjuk be (<math>B</math>-t összekötjük a <math>D, E, F</math> pontok közül valamelyik kettővel).</p>		1 pont
<p>Szintén 3-féleképpen húzható be a <math>C</math>-ből induló harmadik él (<math>C</math>-t összekötjük a <math>D, E, F</math> pontok valamelyikével).</p>		1 pont
<p>Ekkor <math>3 \cdot 3 (= 9)</math> esetet kapunk.</p>	1 pont	<i>Például:</i> 
<p>Az ismeretségi háló tehát <math>(3 + 3 \cdot 3 =)</math> 12-féle lehet.</p>	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>9 pont</b>	

*Megjegyzés: Ha a vizsgázó az összes lehetséges ismeretségi gráfot felrajzolja, és ez alapján helyesen válaszol, akkor ezért 6 pont jár. A további 3 pontot annak indoklásáért kaphatja meg, hogy miért nincs több lehetőség.*

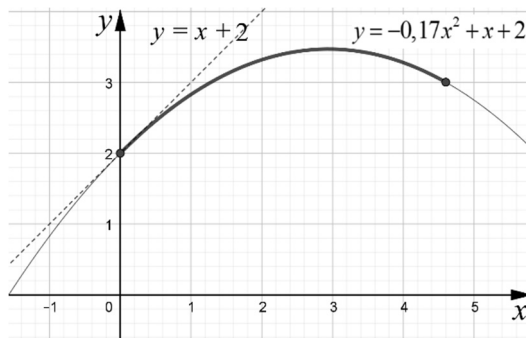
<b>6. c) első megoldás</b>		
Azon csoportok száma, amelyben $A$ benne van, de $B$ nincs: $\binom{4}{2} = 6$ . ( $A$ maradék 4 személyből 2 kerül $A$ mellé.)	1 pont	
Hasonlóan $\binom{4}{2} = 6$ azon csoportok száma, amelyben $B$ benne van, de $A$ nincs (szimmetria).	1 pont	
Azon csoportok száma, amelyben sem $A$ , sem $B$ nincs benne: $\binom{4}{3} = 4$ .	1 pont	
A megfelelő csoportok száma $6 + 6 + 4 = 16$ , ennyi kihallgatást kell szervezni.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>4 pont</b>	

<b>6. c) második megoldás</b>		
A komplementer összeszámlolás módszerét alkalmaz- zuk.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a meg- oldásból derül ki.</i>
A 3 fős csoportok száma $\binom{6}{3} = 20$ (összes eset).	1 pont	
$\binom{4}{1} = 4$ olyan csoport van, melynek $A$ és $B$ is a tagja (kedvezőtlen esetek). ( $A$ maradék 4 személyből 1 kerül $A$ és $B$ mellé.)	1 pont	
A megfelelő csoportok száma $20 - 4 = 16$ , ennyi kihallgatást kell szervezni.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>4 pont</b>	

<b>7. a)</b>		
A nyolc szám átlaga ( $48 : 8 =$ ) 6. (A nagyság szerint rendezett adatok: 3, 4, 6, 6, 7, 7, 7, 8, ezért) a medián 6,5.	1 pont	
A szórás: $\sqrt{\frac{(-3)^2 + (-2)^2 + 3 \cdot 1^2 + 2^2}{8}} =$	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó a szórást szá- mológéppel helyesen ha- tározza meg.</i>
$\left( = \sqrt{\frac{20}{8}} \right) \approx 1,58$ .	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>4 pont</b>	

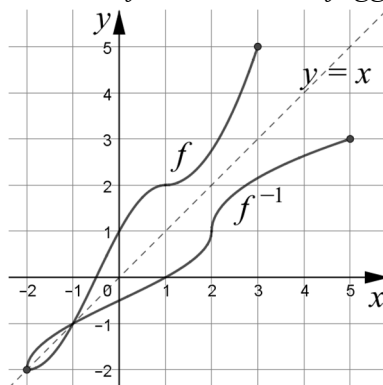
<b>7. b)</b>		
A parabola az $f: x \mapsto ax^2 + bx + c$ másodfokú függvénynek a grafikonja ( $a \neq 0, b, c \in \mathbf{R}$ ).	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
A szöveg alapján $f(0) = 2$ , tehát $c = 2$ .	1 pont	
$f'(0) = m = \text{tg}45^\circ = 1$ .	1 pont	
Mivel $f'(x) = 2ax + b$ ,	1 pont	
ezért $f'(0) = b = 1$ .	1 pont	
$f(4,6) = a \cdot 4,6^2 + b \cdot 4,6 + c = 3$ ,	1 pont	
$21,16a = -3,6$ , ebből $a \approx -0,17$ .	1 pont	$a = -\frac{90}{529}$
A keresett parabola egyenlete $y = -0,17x^2 + x + 2$ .	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>8 pont</b>	

A kosárlabda röppályájának íve a parabolán:



<b>7. c)</b>		
Az inverzfüggvény értelmezési tartománya $[-2; 5]$ ,	1 pont	
értékkészlete $[-2; 3]$ ,	1 pont	
zérushelye 1,	1 pont	
szigorúan monoton növekedő.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>4 pont</b>	

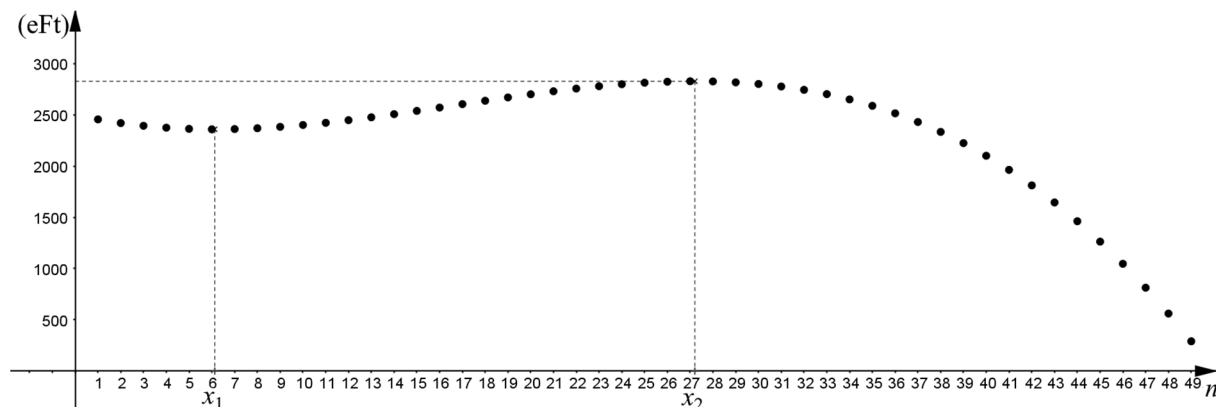
Közös koordináta-rendszerben ábrázolva  $f$ -et és az inverzfüggvényét:



<b>8. a)</b>		
A sorsjegy árát 200 ( $= 20 \cdot 10$ ) Ft-tal csökkentették, tehát $n = 20$ .	1 pont	
Ekkor az eladott sorsjegyek száma $10n^2 = 4000$ -rel több, azaz $5000 + 4000 = 9000$ db,	1 pont	
a havi bevétel pedig $9000 \cdot 300 = 2\,700\,000$ Ft.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>3 pont</b>	

<b>8. b)</b>		
Tegyük fel, hogy $n$ -szer csökkentették 10 Ft-tal az árat, ekkor az új ár $500 - 10n$ (Ft) (ahol $n < 50$ ),	1 pont	
és a havi eladott darabszám $5000 + 10n^2$ .	1 pont	
Az eladásból származó bevétel Ft-ban: $(500 - 10n)(5000 + 10n^2) =$ $= -100n^3 + 5000n^2 - 50\,000n + 2\,500\,000$ .	1 pont	
Tekintsük a pozitív valós számok halmazán értelmezett $f(x) = -100x^3 + 5000x^2 - 50\,000x + 2\,500\,000$ függvényt.	1 pont	
Ennek deriváltfüggvénye $f'(x) = -300x^2 + 10\,000x - 50\,000$ ( $x \in \mathbf{R}$ ),	1 pont	
melynek zérushelyei $x_1 \approx 6,13$ és $x_2 \approx 27,21$ .	1 pont	
A deriváltfüggvény pontosan a két gyök között pozitív, és $x_2$ -ben pozitívból negatívba vált, ezért $x_2$ az $f$ maximumhelye ( $x_1$ -ben negatívból pozitívba vált a deriváltfüggvény).	1 pont	$f''(x_1) > 0$ és $f''(x_2) < 0$ , ezért $f$ -nek $x_2$ a maximumhelye.
( $n$ értéke csak egész lehet.) $f(27) = 2\,826\,700 > f(28) = 2\,824\,800$ , ezért (a modell szerint) 27-szer 10 Ft-tal (230 Ft-ra) kell csökkenteni a sorsjegy árát ahhoz, hogy az értékesítésből származó havi bevétel maximális legyen.	2 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>9 pont</b>	

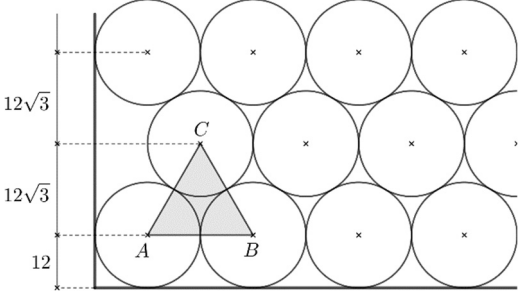
Megjegyzés: Az alábbi grafikon a havi bevételt (1000 Ft-ban megadva) szemlélteti az árcsökkentés függvényében.





<b>8. c)</b>										
(Az 50 000 Ft nyereség valószínűsége $p$ , ekkor) $p + 24p = 0,05$ ,	1 pont	<table border="1"> <tr> <td>nyereség (Ft)</td> <td>0</td> <td>2500</td> <td>50 000</td> </tr> <tr> <td>valószínűség</td> <td>0,95</td> <td>0,048</td> <td>0,002</td> </tr> </table>	nyereség (Ft)	0	2500	50 000	valószínűség	0,95	0,048	0,002
nyereség (Ft)	0		2500	50 000						
valószínűség	0,95	0,048	0,002							
ahonnan $p = 0,002$ és $24p = 0,048$ .	1 pont									
A nyereség várható értéke $(0,95 \cdot 0 +) 0,048 \cdot 2500 + 0,002 \cdot 50\,000 = 220$ Ft.	2 pont									
<b>Összesen:</b>	<b>4 pont</b>									

Megjegyzés: A táblázat helyes kitöltése indoklás nélkül is elfogadható.

<b>9. a)</b>		
A farönköket szemléltető egybevágó, 24 cm átmérőjű körökből (alulról kezdve a számozást) a páratlan sor-számú sorokban 10, a párosokban pedig 9 kör fér el a 240 cm-en.	1 pont	
 <p>(A körközpontok egy 24 cm rácsponttávolságú szabályos háromszögrács egy részletét határozzák meg.) Az ábra <math>ABC</math> szabályos háromszögének magassága <math>12\sqrt{3}</math> (<math>\approx 20,78</math>) (cm). (A körök középpontja ennyivel lesz magasabban minden következő sorban az előző sorban elhelyezkedő körközpontokhoz képest.)</p>	2 pont	
Ha $k$ db sort raktak a teherautóra, akkor a rakomány $(k - 1) \cdot 12\sqrt{3} + 2 \cdot 12$ cm magasságig tölti meg a raktéret.	1 pont*	
A rakomány nem nyúlhat túl a raktéren, ezért $(k - 1) \cdot 12\sqrt{3} + 2 \cdot 12 \leq 200$ .	1 pont*	
$k \leq \frac{176}{12\sqrt{3}} + 1 \approx 9,47$	1 pont*	
Legfeljebb 9 sorban rakhattak fákat a raktérbe.	1 pont*	
5 sorban $5 \cdot 10 = 50$ db, 4 sorban $4 \cdot 9 = 36$ db farönk, összesen tehát legfeljebb $50 + 36 = 86$ farönk lehet a raktérben. (Ezt kellett igazolni.)	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>8 pont</b>	

Megjegyzés: A \*-gal jelölt 4 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó.

9 sor magassága $8 \cdot 12\sqrt{3} + 2 \cdot 12 \approx 190,3$ cm, tehát 9 sor még befér a raktérbe.	2 pont	
10 sor magassága $9 \cdot 12\sqrt{3} + 2 \cdot 12 \approx 211,1$ cm, tehát 10 sor már nem fér be a raktérbe.	2 pont	

### 9. b)

A raktér térfogata: $V_{rt} = 2,4 \cdot 2 \cdot 7 = 33,6 \text{ m}^3$ .	1 pont	
A 86 darab fa térfogata: $V_{fa} = 0,12^2 \cdot \pi \cdot 7 \cdot 86 \approx 27,2 \text{ m}^3$ .	1 pont	
$\frac{V_{fa}}{V_{rt}} \approx \frac{27,2}{33,6} \approx 0,81$ (azaz 81%)	1 pont	
Tehát a raktér térfogatának 19%-a lesz üres.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>4 pont</b>	

### 9. c)

(0,96 a valószínűsége, hogy egy fában nincs szú.) $P(0 \text{ darab szúrágta fa}) = 0,96^{50} \approx 0,130$	1 pont	
$P(1 \text{ darab szúrágta fa}) = \binom{50}{1} \cdot 0,96^{49} \cdot 0,04 \approx 0,271$	2 pont	
A keresett valószínűség ezek összege: $0,130 + 0,271 = 0,401$ .	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>4 pont</b>	